MA1 - přednáška 11. 11. 2020

Užití derivace funkce v bodě:

(1.) V důkazu vzorce pro derivování součinu funkcí jsme užili důležitý důsledek existence vlastní derivace funkce. Zde je důkaz tohoto tvrzení:

1) Chceme-li dokázat, že funkce f je spojitá v bodě a, musíme ukázat, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2) Z předpokladu víme, že existuje $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$.

Jak předpoklad v důkazu 1) využijeme?

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \underset{2)+AL \text{ (vlastní limity)}}{=}$$

(jsme v $P(a)$, tj. $x-a\neq 0$)

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

(zde jsme pro „aritmetiku" limit potřebovali, aby $f'(a)\in\mathbb{R}$!)

Poznámka: 1) Věta nelze „obrátit", tj. neplatí

f je spojitá v bodě a $\Rightarrow$ ex. $f'(a)$

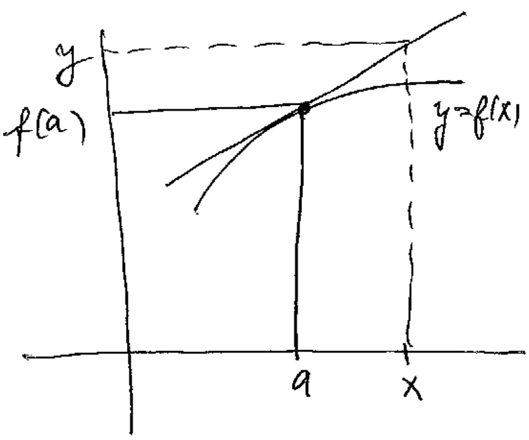
Příklad: $f(x)=|x|$ je spojitá v bodě $a=0$, ale nemá v bodě $a=0$ derivaci

2) Také neplatí věta, když nepředpokládáme $f'(a)$ vlastní (příklad: $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $f'(0)=+\infty$, ale sgn není spojitá v $a=0$)

Ale i při $f'(a)=+\infty$ fce může být spojitá v bodě a (příklad $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=0$)

② tečna ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$

Je dána funkce $y=f(x)$, definovaná v okolí $U(a)$, a nechť ex. $f'(a)\in R$. Připomeneme si geometrický „význam" derivace funkce v bodě – směrnice „tečny" ke grafu fce $y=f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$ (což je tečna ke grafu fce f definovaná jako přímka, jdoucí bodem $[a,f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$)



pak bod $[x,y]$ je bodem této tečny, když bude platit

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad (= k_{tečny})$$

tj. dostaneme následující rovnici tečny ke grafu fce f v bodě $[a,f(a)]$:

$$\underline{y = f(a) + f'(a)(x-a)\ ,\ x\in R}$$

Příklady: 1) $f(x)=x^2$, $a\in R$ $\qquad f'(x)=2x$, $f'(a)=2a$

tečna v bodě $[a,a^2]$: $\quad y = a^2+2a(x-a)$

(tj. $y = 2ax-a^2$)

2) $f(x)=\sin x$ v bodě $[0,0]$ má tečnu: $y=x$

($f'(0)=\cos 0 = 1$)

$f(x)=\arcsin x$ v bodě $[0,0]$ má tečnu: $y=x$

$\left(f'(0)=(\arcsin x)'_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{1-0}}=1 \right.$

stejná tečna ke grafu fce $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{arctg} x$ v bodě $[0,0]$ je přímka $y=x$

3) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $a=0$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ f'(0)=\frac{1}{2} \text{ a } f(0)=1 \Big\} \Rightarrow$$

rovnice tečny ke grafu f v bodě $[0,1]$ je

$$y = 1+\frac{1}{2}x$$

4) $f(x)=e^x$, $a=0$

$f(0)=1$, $f'(0)=1$, tedy rovnice tečny ke grafu exponenciely v bodě $[0,1]$ je $y=1+x$

5) $f(x)=\ln x$, $a=1$

$f(1)=0$, $f'(1)=1$ rovnice tečny v bodě $[1,0]$:

$$y = x-1$$

$$(\ y = 0+1\cdot(x-1)\ )$$

3. Lineární aproximace funkce f v okolí bodu a, kde ex. $f'(a)\in R$:

v okolí $U(a)$ bodu a, kde ex. $f'(a)\in R$ (tj. f je definována v „nějakém" okolí bodu a) můžeme hodnoty fce f „nahradit" s nějakou chybou hodnotami lineární funkce, jejíž graf je tečna ke grafu fce $f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$ (lineární fce je ta „nejjednodušší" mezi funkcemi, a pokud její graf je tečna ke grafu v $[a,f(a)]$, asi se nebude „moc" lišit od hodnot fce f, pokud budeme v „malém" okolí bodu a.

Tedy: 1) ex.-li $f'(a)$, pak funkci

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

nazýváme lineární aproximací funkce f v okolí bodu a.

2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$, $\omega(x-a)$ je „malá"?

($\omega(x-a)$ – chyba aproximace)

a) $\lim\limits_{x\to a} \omega(x-a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) =$

$= \lim\limits_{x\to a} \left(f(x) - f(a)\right) - f'(a)(x-a)) = \underline{0}$

(což víme, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$)

ale navíc, i

$$\lim_{x\to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0,$$

což, protože se jedná o limitu „$\frac{0}{0}$" znamená, že čitatel, tj. chyba $\omega(x-a)$ je „řádově" menší než $(x-a)$, což je pro aproximaci to důležité!

„Pokus": $e^x \cong 1 + x$ v okolí bodu $a=0$

„U nás" tedy: $e^{0,01} \doteq 1{,}01$ – kalkulačka $1{,}0100501\ldots$

$e^{0,001} \doteq 1{,}001$ –"– $1{,}0010005001\ldots$

ale $e^{0,1} \doteq 1{,}01$ kalkulačka $1{,}1051$

a „u nás" $e^1 = 2$ –"– $2{,}7182\ldots$

(jsme už „daleko" od bodu $a=0$)

chyba „velká"

Příklady lineární aproximace funkce:
(v okolí bodu, kde existuje vlastní derivace funkce)

„shrnutí":
existuje $f'(a) \in R$, pak $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$ „blízko" bodu a

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a=0$:
$f(0)=1$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, tedy $f'(0) = \frac{1}{2}$, a pak

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \quad v \ \mathcal{U}(0)$$

b) $f(x) = \ln(1+\sin(4x))$, $a=0$:
$f(0) = \ln 1 = 0$, $\underset{(VDSF)}{f'(x) =} \dfrac{1}{1+\sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4$, tedy $f'(0)=4$;

potom $\ln(1+\sin(4x)) \cong 4x$ v okolí bodu 0 (v $\mathcal{U}(0)$)

Poznámka – jednoznačnost lineární aproximace funkce f v okolí bodu a s chybou $\omega(x-a)$, kde $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$: (*)

Platí: Je-li $y = f(a) + k(x-a)$ taková lineární funkce, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + k(x-a))}{x-a} \underset{(**)}{=} 0, \text{ pak ex. } f'(a) = k \quad (k \in R).$$

(Tedy funkce, jejíž graf je tečna ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$, je jedinou lineární funkcí, která se liší v $\mathcal{U}(a)$ od grafu tak, jak je v (*)).

Dk: $\displaystyle 0 \underset{(**)}{=} \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k \right) \underset{(AL)}{\Rightarrow} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$, tj. $f'(a) = k$.

 (omlouvám se, stránka -6- není, špatně jsem „stránky číslovala").

③ Definice diferenciálu funkce

nechť ex. $f'(x) \in R$, pak lze lineární aproximaci takė „napsat" (v okolí bodu $\underline{x}$)

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \omega(h), \quad \lim_{h \to} \frac{\omega(h)}{h} = 0$$

Výraz $f'(x).h$ „aproximuje" změnu funkce

$$f(x+h) - f(x) = f'(x).h + \omega(h)$$

a nazývá se diferenciál funkce f v bodě x a přírůstku h –

označení: $\quad df(x)(h) = f'(x).h$

Spec: $\quad f(x) = x$, pak $df(x)(h) = 1.h$,
a tedy (v přírodních vědách hlavně)
se značí $\quad h = dx$,

tedy $\quad \underline{df(x) = f'(x)dx \quad \text{(obvykle)}}$

označíme-li $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, pak

$$\underline{\Delta f(x) \cong df(x)(\Delta x)}$$

1. Příklad: objem koule o poloměru R ... $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ – jaká je lineární aproximace změny objemu koule, když změníme R na $R + \Delta R$?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \Delta V = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^3 - R^3\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[\cancel{R^3} + 3R^2\Delta R + 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3 - \cancel{R^3}\right] =$$

$$= 4\pi R^2 \Delta R + 4\pi R(\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$$

$V'(R) = 4\pi R^2$, tedy $\quad dV = 4\pi R^2 \Delta R$

Tedy máme: $\Delta V = dV + 4\pi R(\Delta R^2) + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$

a chyba aproximace je $\Delta V - dV = 4\pi R(\Delta R^2) + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$,

a vidíme, že $\lim\limits_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V - dV}{\Delta R} = \lim\limits_{\Delta R \to 0} 4\pi \left(R\Delta R + \frac{\Delta R^2}{3}\right) = 0$

<u>2. příklad</u> – <u>relativní chyba měření veličiny f</u> ... $\frac{\Delta f}{f}$;

pak lze: $\frac{\Delta f}{f} \simeq \frac{df}{f}$ při výpočtu relativní chyby

a) pak pro $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ je relativní chyba výpočtu

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{dV}{V} = \frac{4\pi R^2 \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{\Delta R}{R}$$

b) <u>relativní chyba výpočtu veličiny $(f\cdot g)(x)$</u>:

$$\frac{\Delta(f\cdot g)(x)}{(f g)(x)} \simeq \frac{d(f\cdot g)(x)}{(f\cdot g)(x)} = \frac{(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx}{f(x)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)dx}{f(x)} + \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \frac{df(x)}{f(x)} + \frac{dg(x)}{g(x)}$$

(tedy, relativní chyba součinu je součtem relativních chyb činitelů) (a podobně lze odvodit „relativní chybu" mocnin, podílu)

Další užití derivace – pro vyšetření chování funkce na intervalu a pro hledání (a občas i nalezení) extrémů funkce:

Co zatím víme: spojitost funkce na intervalu (a,b), resp. $\langle a,b\rangle$:

Věta. Jestliže existuje $f'(x)\in R$ pro každé $x\in(a,b)$, pak je f spojitá v každém bodě $x\in(a,b)$ (říkáme, že f je spojitá v (a,b)).

Jestliže navíc existují ještě $f'_+(a)\in R$ i $f'_-(b)\in R$, je f spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva (pak říkáme, že f je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$.

A dále nejprve rozšíříme náš „slovník" o důležité pojmy, které „popisují" užitečné vlastnosti funkcí:

Definice (monotonní funkce) – už jsme měli „při opakování středoškolské matematiky, ale zopakujeme zde (pro úplnost)

Definice(1): (funkce monotonní na $M\subset Df$)
Říkáme, že funkce $f: M\subset Df \to R$ je na množině M rostoucí (resp. klesající, neklesající, nerostoucí), když platí:

$$\forall\ x_1,x_2\in M,\ x_1<x_2\ :\ f(x_1)<f(x_2)$$

$$(\text{resp. } f(x_1)>f(x_2),\ \text{resp. } f(x_1)\leqq f(x_2),\ \text{resp. } f(x_1)\geqq f(x_2))$$

Funkce rostoucí (klesající) na $M\subset Df$ se nazývají funkce ryze monotónní na M.

Poznámka: monotonii funkcí jsme už „vyšetřovali" přímo z definice – při odhadu chování funkcí při „probírání" limit, nejprve u těch „základních" funkcí, ale např. i u funkce složené – $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ i jiných.

Definice (2): (definice lokálních extrémů funkce)

Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in Df$ lokální maximum (resp. lokální minimum), když existuje okolí bodu x_0 $U(x_0) \subset Df$ tak, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí :

$$f(x) \leqq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqq f(x_0)),$$

Platí-li pro všechna $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$), (tj. když v $P(x_0)$ platí nerovnost ostré), nazýváme hodnotu $f(x_0)$ ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum).

Definice (3): (globální extrémy funkce)

Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ globální maximum (resp. globální minimum), když pro všechna $x \in Df$ platí

$$f(x) \leqq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqq f(x_0)).$$

Poznámka : 1. Často se též říká, že f nabývá v bodě $x_0 \in Df$ svého globálního maxima (resp. globálního minima)

2. Je-li $f(x) < f(x_0)$ pro všechna $x \neq x_0$, $x \in Df$, nazývá se $f(x_0)$ často ostré globální maximum (analog. $f(x_0)$ je ostré globální minimum f, když $f(x) > f(x_0)$ pro všechna $x \in Df$, $x \neq x_0$.

3. Má-li funkce f v bodě x_0 globální maximum (resp. minimum), a je-li $U(a) \subset Df$, pak f má v bodě x_0 i maximum lokální (resp. minimum lokální).

Jednoduché příklady – extrémy u jednoduchých funkcí (základních) vidíme hned, nebo také „hned" vidíme, že globální extrémy nemají; u „složitějších" funkcí se hledají extrémy obtížněji, probereme později :

1. $f(x) = x^2,\ x \in R$:

$f(x) \geqq f(0)$ pro $\forall x \in R$, tedy, f má v bodě $x_0 = 0$ globální minimum, dokonce ostré – $f(x) > 0$ pro $\forall x \neq 0$;

protože ale $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$, funkce $f(x) = x^2$ nemůže „mít" největší hodnotu (plyne z definice limity „$+\infty$", ale je i „vidět");

2) $f(x) = 4 - x^2,\ x \in R$

$4 - x^2 \leqq 4 (= f(0))$, navíc, pro $x \neq 0$ je $4 - x^2 < f(0)$, tj. f má v bodě $x_0 = 0$ ostré globální maximum, ale globální minimum funkce nemá, neboť $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$;

3) $f(x) = \sin x,\ x \in R$

funkce $\sin x$ má globální maxima v bodech $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$ $(f(x_k) = 1)$ a globální minima v bodech $x_\ell = \frac{3\pi}{2} + 2\ell\pi,\ \ell \in Z$ $(f(x_\ell) = -1)$

4) ale $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in R$

f je rostoucí v R, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, f je omezená v R, ale globální minimum ani globální maximum funkce $\operatorname{arctg} x$ nenabývá – „nejmenší" je limita $(= -\frac{\pi}{2})$, „největší" je opět limita $(\frac{\pi}{2})$

5) a podobně i naše první funkce $f(x) = x^2$, když budeme vyšetřovat globální extrémy na intervalech – – třeba $J_1 = \langle 0, 1 \rangle$, $J_2 = (0, 1\rangle$, $J_3 = \langle 0, 1)$, $J_4 = (0, 1)$:

(i) na $J_1 = \langle 0,1 \rangle$ má $f(x) = x^2$ globální maximum $f(1) = 1$, a globální minimum $f(0) = 0$;

(ii) je-li $J_2 = (0,1\rangle$, pak $f(1)$ je globální maximum, ale globální minimum už f na $(0,1\rangle$ nemá – opět, jako u arctg x, „nejmenší" je $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0$, a $x^2 > 0$ pro $x \in (0,1\rangle$;

(iii) na intervalu $J_3 = \langle 0,1)$ je to „obrácené" – globální minimum f na J_3 je v bodě $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, ale globální maximum f na $\langle 0,1)$ nemá („největší" je limita $\lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$, ta ale není žádnou funkční hodnotou)

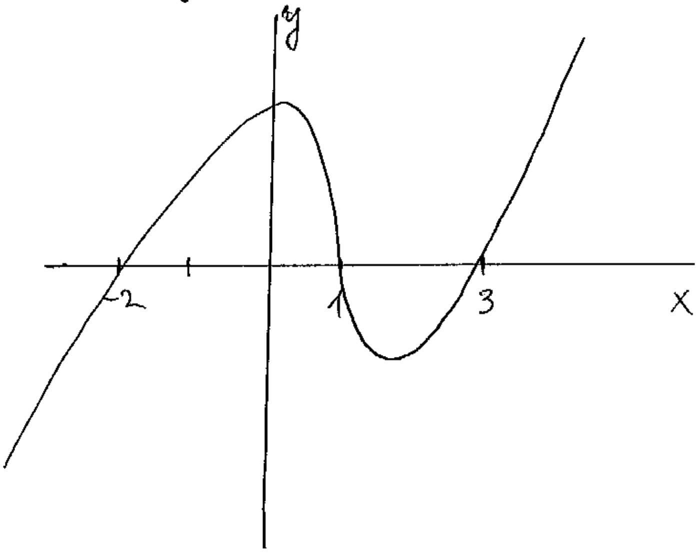
(iv) na intervalu $J_4 = (0,1)$, $f(x) = x^2$ nenabývá ani globálního maxima, ani globálního minima.

6) <u>příklad k „představě" lokálních extrémů funkce</u>

vezměme <u>$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$</u>:

$D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v $\mathbb{R}$, $f(x) = 0 \iff x = -2,\ x = 1,\ x = 3$,
$f(x) < 0$ v $(-\infty, -2)$ a v $(1,3)$, $f(x) > 0$ v $(-2,1)$ a v $(3, +\infty)$,
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$,

<u>náčrtek grafu f: (přibližně)</u>



– f nemá globální extrém (plyne z $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$), ale má lokální maximum v intervalu $(-2,1)$ a lokální minimum v $(1,3)$

A nyní – „pokus" o vyšetření vlastností funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ tak, abychom si mohli představit (a načrtnout) graf této funkce

Co víme, a co ještě je třeba prozkoumat?

1) Víme:

a) $D_f = R$, f je spojitá v R, má ve všech bodech $f'(x)$ vlastní;

b) $f(x) \geq 0$ v R, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tedy, f má v bodě $x_0 = 0$ ostré globální minimum;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} =$ „$\infty \cdot \infty$" $= \infty \Rightarrow f$ nemá globální maximum

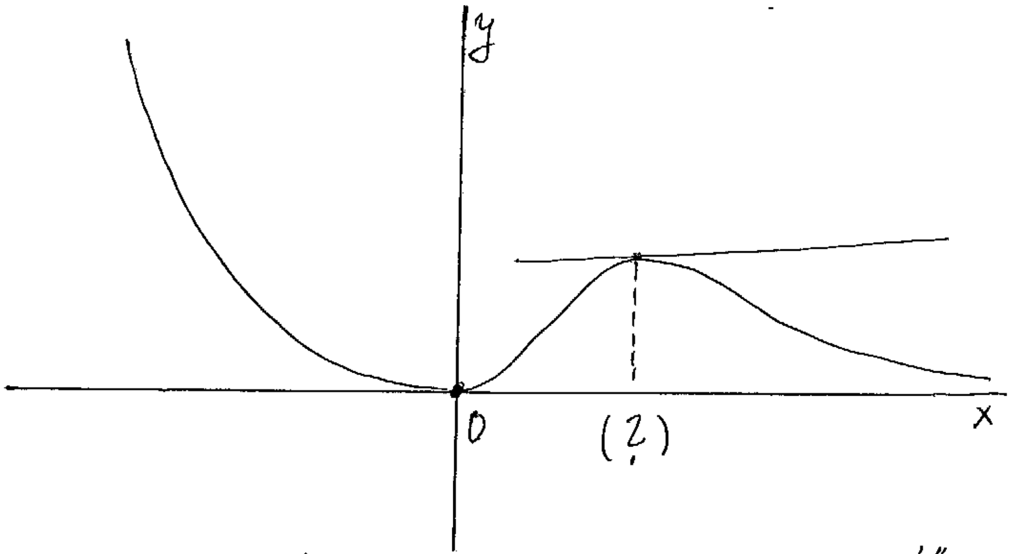
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} =$ „$\infty \cdot 0$" $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} =$ „$\frac{\infty}{\infty}$" $= ?$

Zatím „neumíme" tuto limitu určit (i když asi „odhadujeme", že $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, neboť funkce e^x „jde" k ∞ asi dost rychleji než funkce x^2) – zatím nemáme nástroj, jak bychom tuto limitu vyšetřili – bude dána důležitá věta o počítání limit neurčitých výrazů „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\infty}{\infty}$" – – pravidlo l'Hospitalovo;

Zkusme odhadnout graf funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ –

– víme, že f je spojitá v R, $f(0) = 0$,
protože $f'(x) \in R$ existuje pro každé $x \in R$, graf bude mít tečnu v každém bodě $[x, f(x)]$, $x \in R$;
$f(x)$ bude „asi" klesající v $(-\infty, 0\rangle$ (zkuste ukázat z definice), od bodu $x_0 = 0$ f „musí" růst a pak nakonec (asi) „klesat" k ose x pro $x \to \infty$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$):

Tedy odhad grafu:



Co vidíme – „všude" v intervalu $\langle 0,+\infty)$ f „musí" mít lokální maximum – jak to „zjistíme", a je extrém jen jeden, nebo je v D_f více lokálních extrémů? Pomůže zde i vyšetření „monotonie" funkce, je „vidět", že budeme umět lokální extrémy najít, pokud budeme umět najít intervaly z D_f, kde daná funkce je rostoucí, či klesající. (Obecněji budeme vyšetřovat extrémy funkce v příští přednášce).

„Podezřelé" body z lokálního extrému – říká se „kritické" body – dostaneme díky následující větě:

Věta (nutná podmínka lokálního extrému)

Má-li funkce f lokální extrém v bodě $x_0 \in D_f$, a existuje-li $f'(x_0)$ vlastní (tj. $f'(x_0) \in R$), pak je $f'(x_0) = 0$.

(body, kde $f'(x_0)=0$, se nazývají stacionární body)

Tedy „graficky" – tečna ke grafu v bodě lokálního extrému funkce je rovnoběžná s osou x (předpokládáme $f'(x_0) \in R$) – „musí" být rovnoběžná s osou x – z grafu je to „zřejmé".

Důkaz ukážeme v dodatku k přednášce („nepovinné")

A další důležitá věta (o vyšetření monotonie funkce)

<u>Věta:</u>

Je-li $f'(x) > 0$ v (a,b), pak f je rostoucí v (a,b)
(a je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, je f rostoucí v $\langle a,b\rangle$);

je-li $f'(x) < 0$ v (a,b), pak f je klesající v (a,b)
(a je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, je klesající v $\langle a,b\rangle$)

je-li $f'(x) \geqq 0$ v (a,b), pak f je neklesající v (a,b),
je-li $f'(x) \leqq 0$ v (a,b), pak f je nerostoucí v (a,b)
(a opět, je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, je neklesající, resp. nerostoucí v $\langle a,b\rangle$.

A odtud snadno plyne:

<u>Věta:</u> Je-li $f'(x) = 0$ v (a,b), pak $f(x)$ je v (a,b) konstantní.

<u>Poznámka:</u> Pozor! Tvrzení o souvislosti znaménka derivace a monotonie jsou pro intervaly !!

Důkaz uvedené věty vyžaduje znalost jedné ze základních vět diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné – připravím to v dodatku k přednáškám v MA1 (čtení nepovinné), nebo vše najdete i v doporučené literatuře, pokud si důkaz budete chtít „přečíst".

<u>Vraťme se teď k vyšetřování funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$:</u>

1) vypočítáme $f'(x)$, najdeme body, kde $f'(x) = 0$ –
– stacionární body
2) mezi „stacionárními" body vyšetříme znaménko $f'(x)$
(a odtud „monotonii" funkce v intervalech)

1) $f'(x) = (x^2 e^{-x})' = 2x e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1) = x(2-x)e^{-x}$, $x \in R$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$ – stacionární body fce

$x_0 = 0$ – už víme, že zde je globální minimum;

$x_0 = 2$ – zde bude „asi" hledané lokální maximum – – jak to ověříme? Vyšetříme znaménko derivace v intervalech „mezi" body stacionárními a vyšetříme, kde je f „rostoucí", resp. klesající:

2) Vyšetření znaménka derivace $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ ($e^{-x} > 0$, stačí vyšetřit funkci $x(2-x)$ (třeba i graficky))

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f':	$- \cdot + \cdot +$ $-$		$+ \cdot + \cdot +$ $+$		$+ \cdot - \cdot +$ $-$
	$\searrow$ f klesá v $(-\infty, 0\rangle$		$\nearrow$ f je rostoucí v $\langle 0, 2\rangle$		$\searrow$ f je klesající v $\langle 2, +\infty)$

a odtud plyne, že v bodě $x = 2$ je ostré lokální maximum
$\left(f(2) = \frac{4}{e^2} \right)$

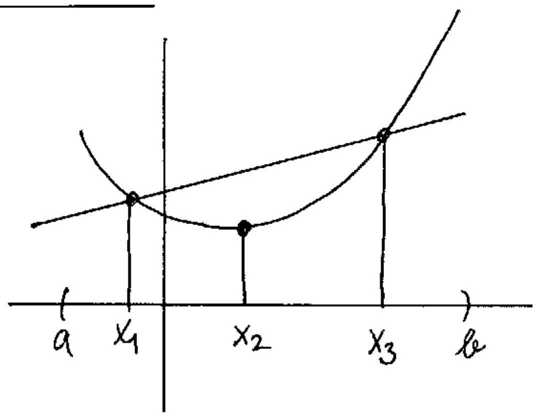
A co ještě je dobré pro představu grafu funkce vyšetřit?

„Prohnutí" grafu funkce:

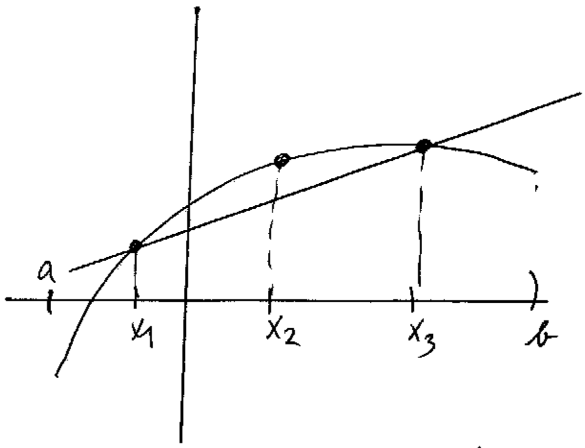
Definice: Nechť funkce f je spojitá na intervalu J ($\subset R$). Pak říkáme, že f je konvexní (resp. konkávní) na J, když platí: pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$, je bod grafu f $[x_2, f(x_2)]$ pod přímkou (resp. nad přímkou), nebo na přímce, spojující body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ grafu f.

někdy se také říká, že funkce je v J ryze konvexní (resp. ryze konkávní), když bod $[x_2, f(x_2)]$ grafu f leží pod (resp.) nad) přímkou, spojující body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$.

Náčrtek:



funkce (ryze) konvexní na (a,b)



funkce (ryze) konkávní na (a,b)

A jak se „pozná", že funkce je na J konvexní nebo konkávní?

Dříve ještě jedno „pozorování":

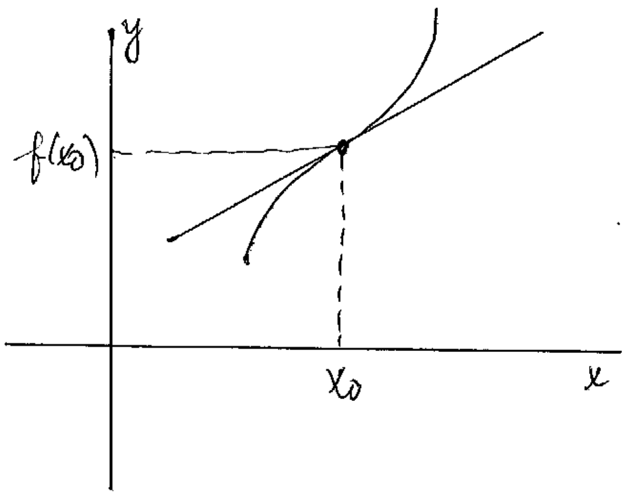
Vrátíme-li se k náčrtku grafu $f(x) = x^2 e^{-x}$, pak vidíme, že funkce je „určitě" konvexní v okolí bodu $x = 0$, , tj. v okolí globálního (a tedy i lokálního) minima, a naopak je konkávní v okolí bodu $x = 2$, kde má funkce lokální maximum, „někde" tedy musí f „přejít z konvexní na konkávní", stejně tak i mezi lokálním maximem a „∞" musí se někde f „konvexně" blížit k ose x, neboť $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0$, a $f(x) > 0$. Takový bod $[c, f(c)]$ grafu, kde funkce „přechází" z konvexní na konkávní (nebo obráceně), se nazývá inflexní bod grafu funkce f (nebo se říká také, že v bodě $x = c$ má funkce f inflexi).

a přesně:

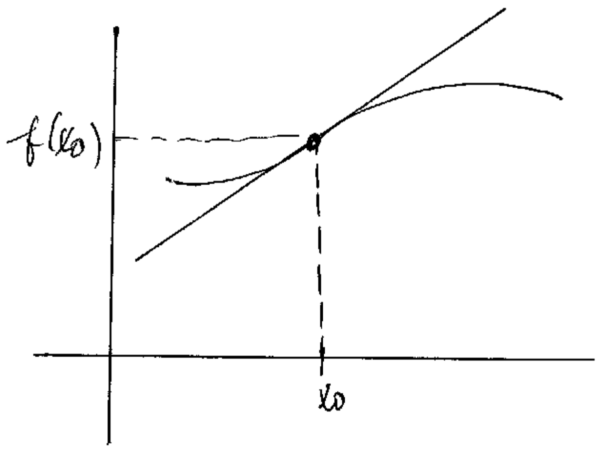
<u>Definice (4):</u> Nechť funkce f je spojitá v (a,b), $x_0 \in (a,b)$ a nechť existuje $f'(x_0)$ $(\in R^*)$; je-li funkce konvexní v intervalu (a,x_0) a konkávní v intervalu (x_0,b) (nebo obráceně, konkávní v (a,x_0) a konvexní v (x_0,b)), říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi, také, že bod $[x_0,f(x_0)]$ je inflexním bodem grafu funkce f.

a poznámka k definici:

Víme, že když je funkce spojitá v (a,b), a existuje $f'(x_0)$ (třeba i nevlastní), graf funkce f má v bodě $[x_0,f(x_0)]$ tečnu (pro $f'(x_0) = \pm\infty$ „svislou"); pak, je-li $[x_0,f(x_0)]$ inflexní bod grafu f, graf „přechází" v bodě $[x_0,f(x_0)]$ z „jedné strany" tečny na „stranu" druhou.

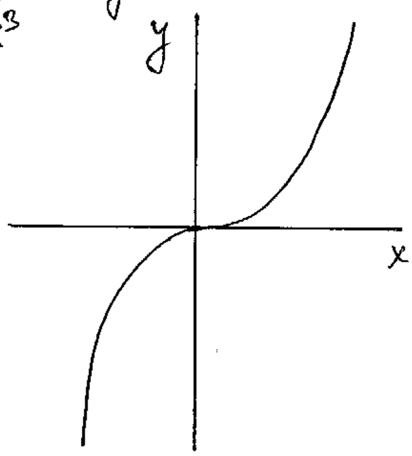


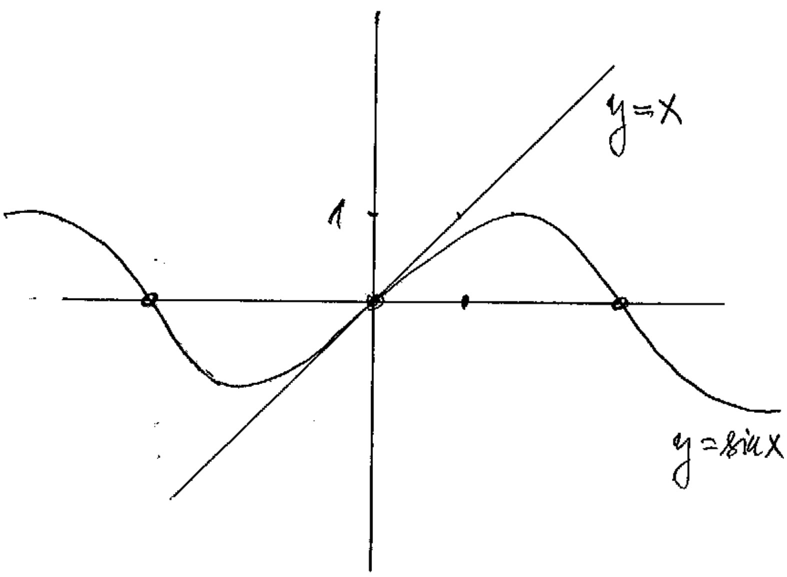
nebo



<u>a příklady (jednoduché)</u>

$f(x)=x^3$





A nyní věta (jak se „pozná", že je funkce na intervalu I konvexní, resp. konkávní)

Věta: (jednodušší „forma")

a) Je-li $f''(x) > 0$ v (a,b), pak je funkce f (ryze) konvexní v (a,b).

b) Je-li $f''(x) < 0$ v (a,b), pak je funkce f (ryze) konkávní v (a,b).

c) Je-li $[x_0, f(x_0)]$ inflexní bod grafu f, a existuje $f''(x_0) \in R$ (vlastní), pak $f''(x_0) = 0$ (nutná podmínka inflexe).

A pokud $f''(x_0) = 0$, pak f bude mít v bodě $x = x_0$ inflexi, když $f''(x)$ bude měnit v bodě $x = x_0$ své znaménko, tedy, když bude platit $f''(x) > 0$ v nějakém okolí $P_-(x_0)$ a $f''(x) < 0$ v $P_+(x_0)$ (nebo obráceně).

A vraťme se k funkci $f(x) = x^2 e^{-x}$:

$$f''(x) = ((2x - x^2)e^{-x})' = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2), \quad x \in R$$

$f''(x)$ je spojitá funkce, znaménko se může měnit jen v nulových bodech, tj. (a zjistíme i „přímo" bez této vlastnosti spojitých fcí)

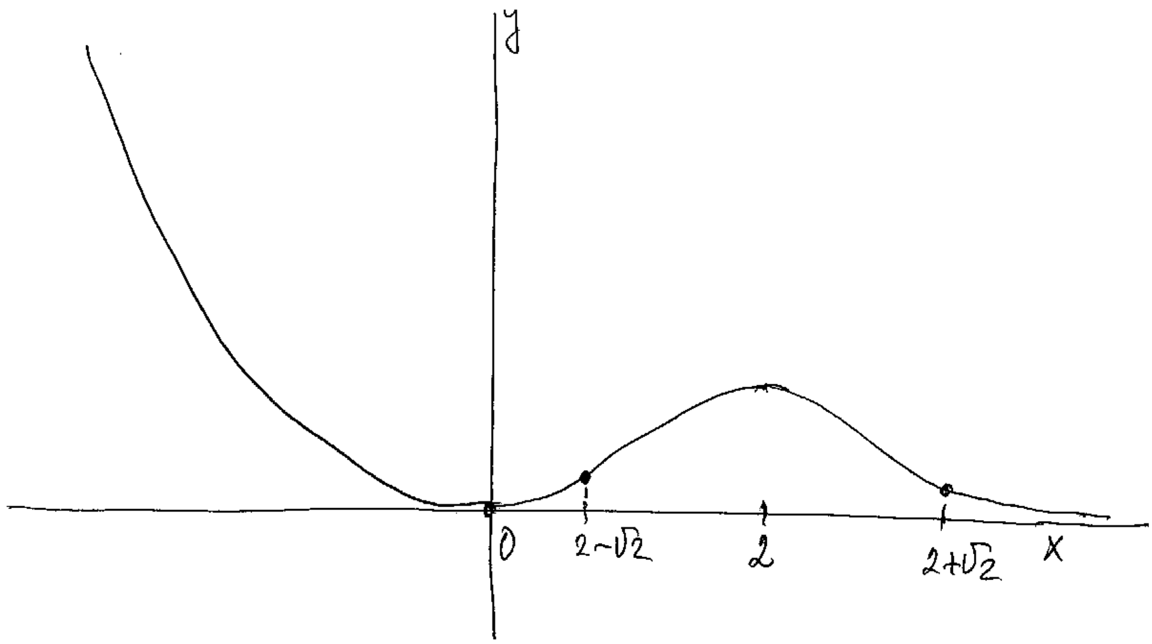
$$\begin{array}{llllllll} f'': & + & | & - & | & - & | & + \\ f: & \cup & 2-\sqrt{2} & \cap & 2 & \cap & 2+\sqrt{2} & \cup \end{array}$$

(užívané „značky")
$\cup$ – konvexní f v intervalu
$\cap$ – konkávní f v intervalu)

$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

tj. f je konvexní v intervalech $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ a $(2+\sqrt{2}, +\infty)$, a f je konkávní v intervalu $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, tedy v bodech $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ má f inflexi.

Vyšetřený graf: $\left(f(2) = \frac{4}{e^2}\right)$



6) Chybí ještě návod pro výpočet limit typu $\frac{\infty}{\infty}$ a $\frac{0}{0}$ pomocí derivací:

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

A) 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $a \in R^*$
2) existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow$ existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

B) 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \underset{(-)}{+}\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ $(a \in R^*)$
2) ex. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$\Rightarrow$ existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Příklady:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} =$

$= „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$ (l'H. pravidlo lze užít opakovaně, pokud jsou splněny předpoklady)

(analog. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ n\in N}} \frac{e^x}{x^n} = \infty$)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = „\frac{1}{\infty}" = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+3x^2)} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2\cancel{x}}{\frac{1}{1+3x^2}\cdot 6\cancel{x}} \underset{AL}{=}$

$= \frac{1}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x . \ln x = „0.(-\infty)" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = „\frac{-\infty}{+\infty}"$

$\underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0$

6) a odtud: $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$

Poznámky: 1) věta není ekvivalence, tj.: limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ může existovat, i když funkce $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ v bodě $\underline{a}$ limitu nemá

Př. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} = 1$$

(neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 1$ (VOS))

ale $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ neexistuje

2) při použití l'Hospitalova pravidla je třeba ověřit předpoklady věty!

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \ \left(=\frac{1}{0^+}\right)$ ale uděláme-li l'Hospitalovo pravidlo (nesprávně) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{1} = 0$!!

3) l'Hospitalovo pravidlo lze užít i pro limity typu „$\frac{\text{cokoliv}}{\infty}$" – ale není třeba – („$\frac{L}{\infty} = 0$" a „$\frac{\text{omez.}}{\infty}$" $= 0$)

A nakonec, pro zájemce, důkaz věty – o nutné podmínce lokálního extrému: nejprve větu „připomeneme":

<u>Věta</u>: Má-li funkce f v bodě $x_0 \in D_f$ lokální extrém, a má-li f v bodě x_0 vlastní derivaci, tj. existuje-li $f'(x_0) \in R$, pak $f'(x_0) = 0$.

<u>Důkaz</u>:

(sporem) předpokládejme, že $f'(x_0) \neq 0$, bez „újmy" na obecnosti lze předpokládat, že $f'(x_0) > 0$; pak tedy je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(= f'(x_0)\right) > 0,$$ tedy, dle jedné z „teoretických" vět v závěru naší části přednášky o limitách, je i

funkce $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ v nějakém okolí $P(x_0)$ (prstencovém okolí bodu x_0);

tedy, pro $x > x_0$, $x \in P(x_0)$ je i $f(x) - f(x_0) > 0$, tj. $f(x) > f(x_0)$,
a pro $x < x_0$, $x \in P(x_0)$ je $f(x) - f(x) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$ –
– tedy „dohromady" – existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro $x \in P_+(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x \in P_-(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$ –
– to ale „znamená", že v libovolném prstencovém okolí jsou body x, kde $f(x) > f(x_0)$ i takové body x, kde $f(x) < f(x_0)$, tež v bodě x_0 není lokální extrém.
(analogicky lze dokázat toto i pro $f'(x_0) < 0$)